


PD PARSIAL



Bentuk fungsi yang akan dibahas diantaranya adalah Laplace, Poisson, panas dan gelombang. Sedangkan bentuk model yang diperkenalkan adalah model eliptik, parabolik, dan hiperbolik.



Jika persamaan Diferensial parsial adalah linier pada turunan tertinggi maka disebut **Quasilinear**

Sehingga persamaan Quasilinear orde dua dengan dua variabel bebas dapat ditulis sebagai berikut :


$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

dengan u = fungsi yang tidak diketahui





Persamaan #disebut sebagai :

- ❖ bentuk **ElIPTIK** jika $ac - b^2 > 0$ (pers.Laplace)
 - ❖ bentuk **Parabolik** jika $ac - b^2 = 0$ (pers.panas)
 - ❖ bentuk **hyperbolik** jika $ac - b^2 < 0$ (pers.gelombang)
- 

Catatan : pada pers. Panas dan gelombang, variabel y adalah t (waktu)

Aplikasi yang menggunakan pers. bentuk ElIPTIK biasanya menyertakan **Boundary value Problem** (masalah nilai batas) dalam daerah R , dan disebut "**First Boundary Value Problem**" atau Dirichlet Problem.





Jika u ditentukan pada kurva C dalam daerah R , dan disebut " **Second Boundary Value Problem**" atau **Neuman Problem**. Jika $U_n = \partial_u / \partial_n$ (turunan normal U) ditentukan pada kurva C dan " **Third Boundary Value Problem**" atau " **mixed Problem**" jika U ditentukan pada sebagian dari C dan U_n pada bagian yang lain kurva C biasanya kurva tertutup.





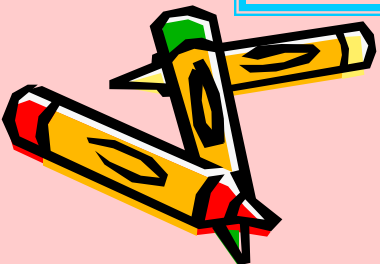
PERSAMAAN DIERENSIAL UNTUK PERSAMAAN LAPLACE DAN POISSON


PERSAMAAN LAPLACE

$$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} = 0$$

PERSAMAAN POISSON

$$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} = f(x, y)$$





Kedua persamaan tersebut adalah merupakan pers. Dengan bentuk Elliptik yang sangat penting dalam Aplikasi Rekayasa. Untuk mendapatkan solusi metode numeriknya kita rubah bentuk pers. Diferensial Parsial pada pers. Tersebut dengan menggunakan Formula Taylor.

$$U(x+h,y) = U(x,y) + hU_x(x,y) + \frac{1}{2}h^2U_{xx}(x,y) + \frac{1}{6}h^3U_{xxx}(x,y) + \dots \quad (4a)$$

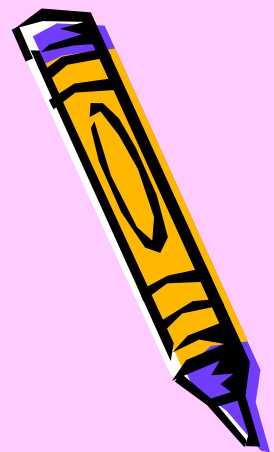
$$U(x-h,y) = U(x,y) - hU_x(x,y) + \frac{1}{2}h^2U_{xx}(x,y) - \frac{1}{6}h^3U_{xxx}(x,y) + \dots \quad (4b)$$

Kurangkan #4a & #4b, dan abaikan besar h^2, h^3, \dots maka :

$$U_x(x,y) \approx \frac{1}{2h} [U(x+h,y) - U(x-h,y)] \quad (5a)$$

Dengan cara yang sama :

$$U_y(x,y) \approx \frac{1}{2k} [U(x,y+k) - U(x,y-k)] \quad (5b)$$





Untuk mendapatkan turunan keduanya maka jumlahkan #4a & #4b , dan abaikan h^3, h^4, \dots

$$U(x+h,y) + U(x-h,y) \approx 2U(x,y) + h^2U_{xx}(x,y)$$


Maka :

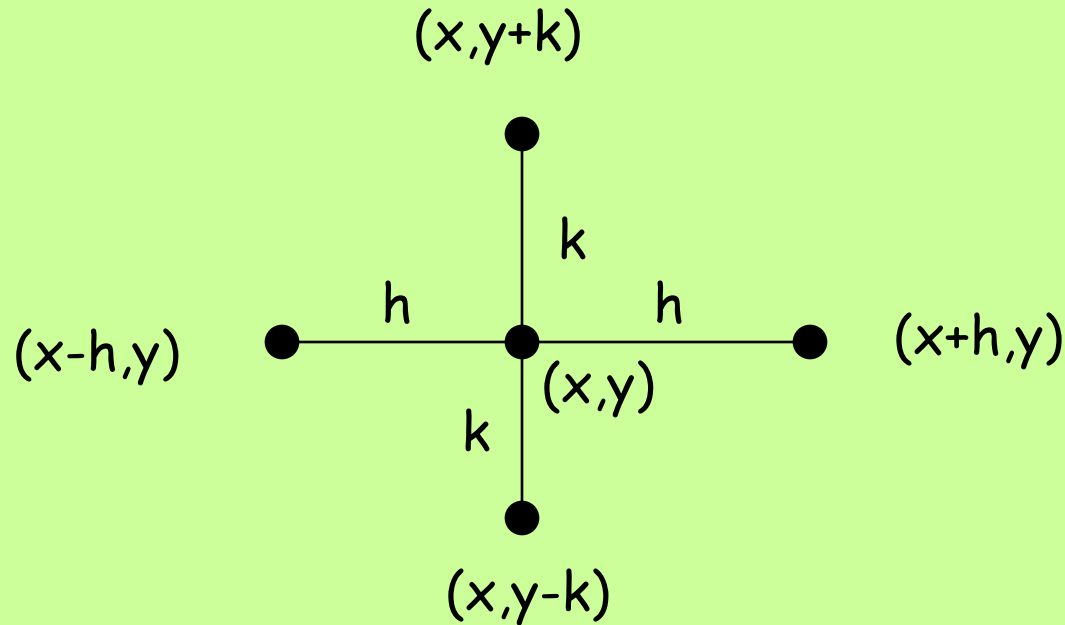
$$U_{xx}(x,y) = \frac{1}{h^2} [U(x+h,y) - 2U(x,y) + u(x-h,y)] \quad (6a)$$

dengan cara yang sama :

$$U_{yy}(x,y) = \frac{1}{h^2} [U(x,y+k) - 2U(x,y) + U(x,y-k)] \quad (6b)$$





$$U_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk} [U(x+h, y+k) - U(x-h, y+k) - U(x-h, y-k) + U(x+h, y-k)]$$



Subtitusikan #3 ke dalam pers.Poisson #6a,#6b dan untuk memudahkan tentukan $h=k$; maka :

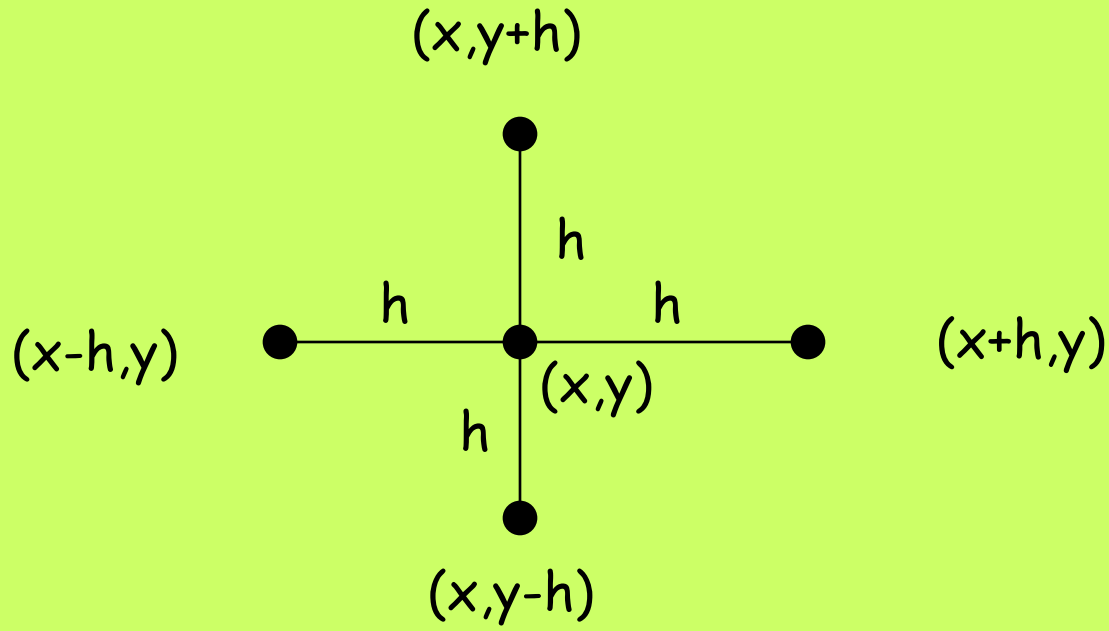




$$U(x+h, y) + U(x, y+h) + U(x-h, y) + U(x, y-h) - 4U(x, y) = h^2 f(x, y)$$

(7)



Sehingga persamaan Laplace menjadi :

$$U(x+h, y) + U(x, y+h) + U(x-h, y) + U(x, y-h) - 4U(x, y) = 0 \quad (8)$$

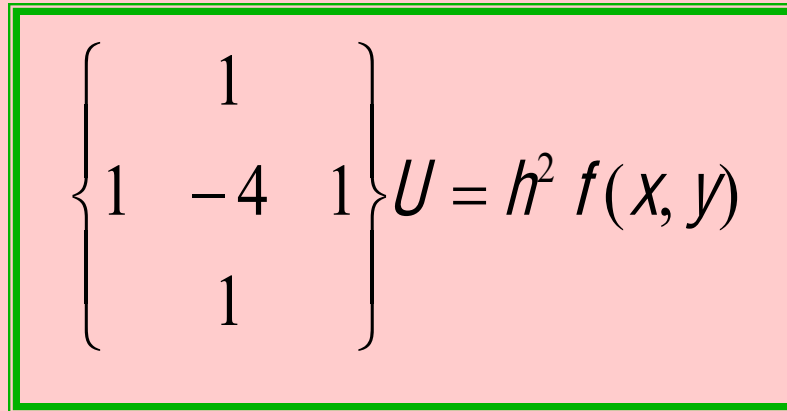
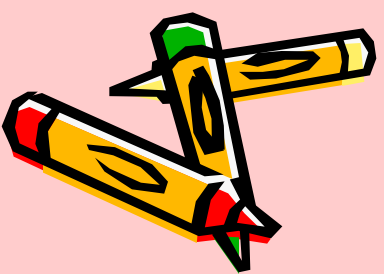




Jika kita memperhatikan pers.#7 dan #8 kita akan mendapat pola yang berbentuk :


$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad -4 \quad 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

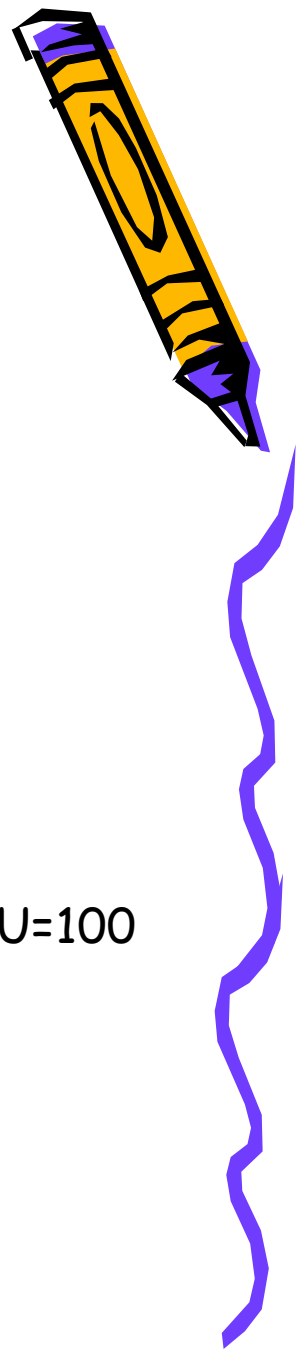
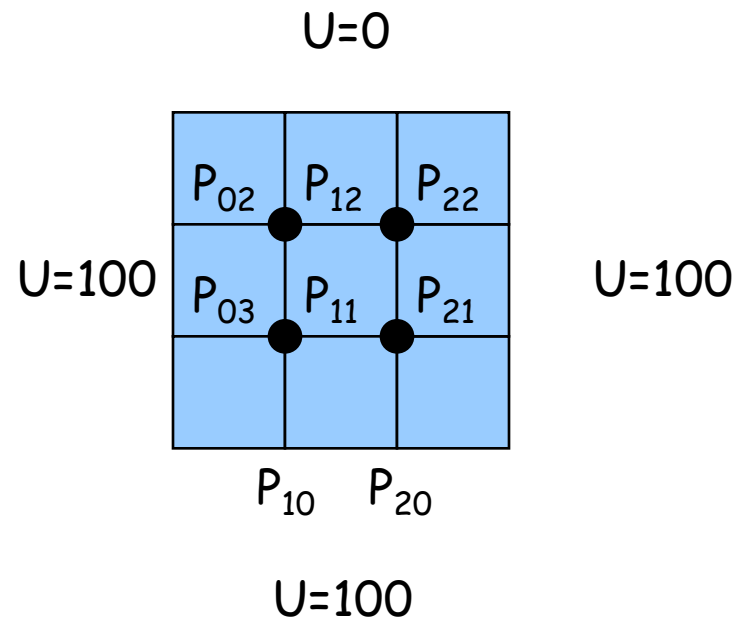
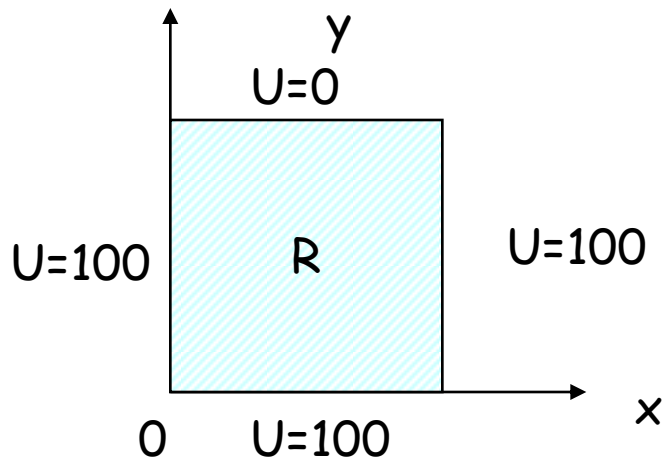
Sehingga persamaan #7 menjadi :


$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad -4 \quad 1 \\ 1 \end{array} \right\} U = h^2 f(x, y)$$


Contoh :

Empat sisi sebuah pelat persegi dengan sisi 12 cm dibuat dari material yang homogen dan dipertahankan suhunya di keempat sisinya konstan 0°C dan 100°C (seperti terlihat pada gambar di bawah). Gunakan $h=4\text{cm}$ untuk menentukan temperatur pada titik-titik jaring pada kondisi Steady state.

Jawaban :





TITIK P₁₁

$$-4U_{11}+100+U_{21}+U_{12}+100 = 0$$

$$-4U_{11}+U_{21}+U_{12} = -200 \quad (1)$$

TITIK P₂₁

$$-4U_{21}+100+100+U_{22}+U_{11} = 0$$

$$U_{11}-4U_{21}+U_{22} = -200 \quad (2)$$

TITIK P₂₂

$$-4U_{22}+U_{21}+100+0+U_{12} = 0$$

$$U_{21}+U_{12}-4U_{22} = -100 \quad (3)$$

TITIK P₁₂

$$-4U_{12}+U_{11}+U_{22}+0+100 = 0$$

$$U_{11}-4U_{12}+U_{22} = -100 \quad (4)$$



Kita urutkan persamaan #1 s/d #4

$$\begin{aligned} -4U_{11} + U_{21} + U_{12} &= -200 \\ (1) \end{aligned}$$


$$U_{11} - 4U_{21} + U_{22} = -200 \quad (2)$$

$$U_{11} - 4U_{12} + U_{22} = -100 \quad (3)$$

$$U_{21} + U_{12} - 4U_{22} = -100 \quad (4)$$

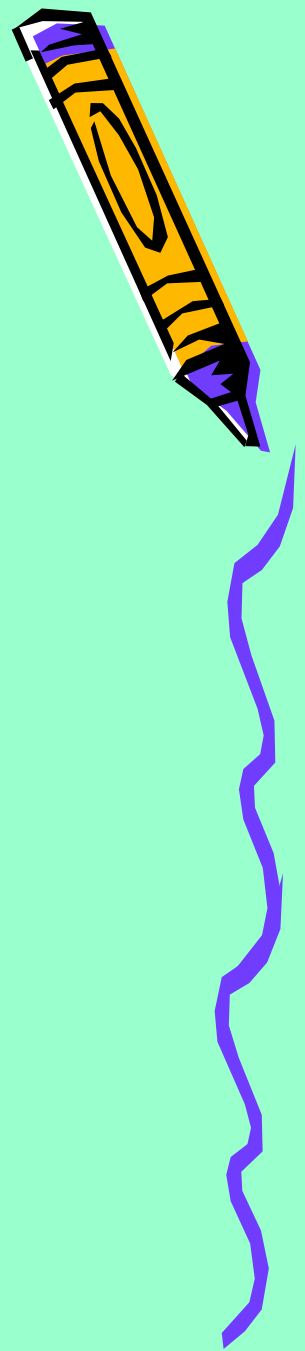
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -200 \\ -200 \\ -100 \\ -100 \end{Bmatrix}$$





Jadi :

$$\begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 87,5 \\ 87,5 \\ 62,5 \\ 62,5 \end{Bmatrix}$$





STOP